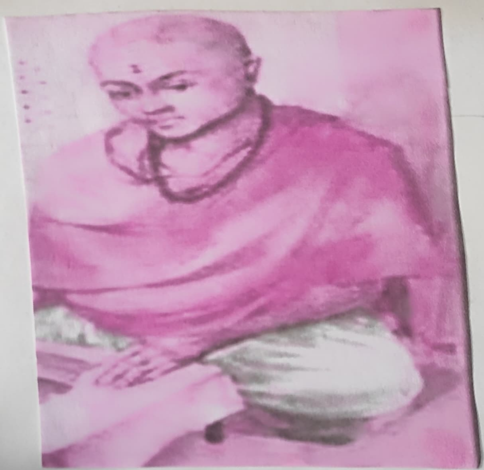
BEST WISHES FROM HEAD OF THE DEPARTMENT

Students of the Department of mathematics are going to make the wall magazine named *GANIT* this year also. Doing this they gain some extra knowledge which is different from their own course of Study.

It will impact on their mind positively and their vision to the mathematics will draw them to the mission of mathematics. They will be ambitious to persue higher mathematics which is also an aim of NEP. Again such activity will build Collectivity Creativity - Togetherness in them. This year we emphasis our almost 11 articles prepared on indian mathematics and it's Contribution to the world mathematics.

However, my best wish is always with the beloved students and dear Colleagues for their earnest effort to make the wall magazine successfully.



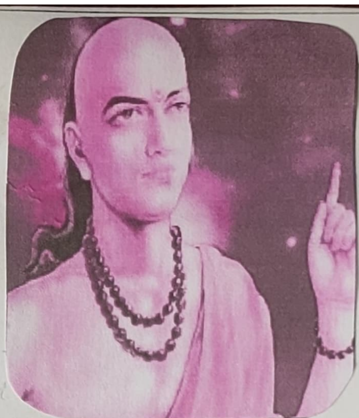
Brahmagupta

(598 AD - 665 AD)
Bhinmal, Rajasthan

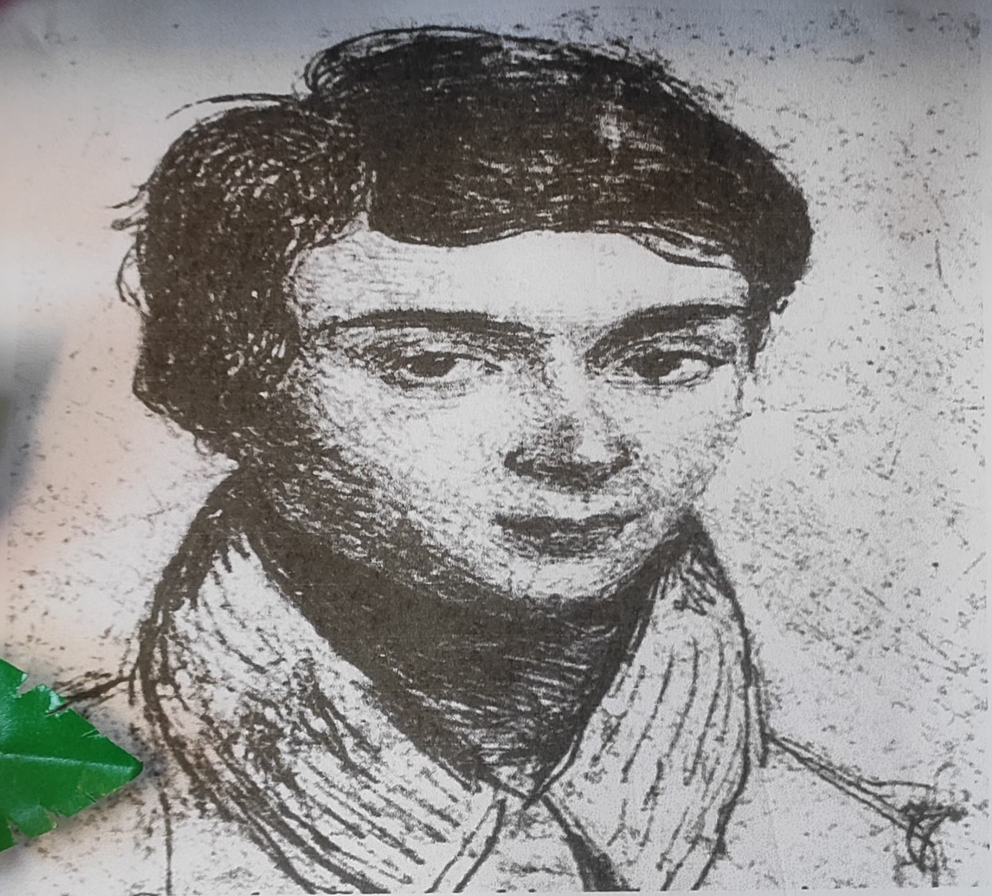
He was a highly accomplished Indian Astronomer and Mathematician. He became the head of the astronomical observatory at Ujjain, the leading center of ancient Indian Astronomy.
"Brahmagupta Siddhanta" is has most famous work in Mathematics. He introduced zero as a number from place value system of Aryabhatta & introduced the concept of negative numbers.

Aryabhatta

(476 AD - 550 AD)
Kerala, Later in Kusumapura, Bihar



He wrote the book 'Aryabhatiya'. It contains arithmetic, algebra, plane geometry and spherical trigonometry. He discovered 'Zero' as place value system, and determined the value of π correct to four decimal places.



Évariste Galois(25.10.1811-30.05.1832)

(A Mathematician of short life)

At the age of 16 he mastered the works of Legendre and Lagrange.
At the age of 18 he wrote research papers first and were refered to Cauchy and Fourier.
At 1830 he was impresoned for revolutionary political offence. At last he shot dead in a dual at the age 20.

Contribution: The theories of Normal Subgroups, Isomorphisms, Simple Groups, Finite Fields and Galois Theory

Srinivasa Ramanujan

Full Name: Srinivasa Aiyangar Ramanujan

Born: 22 Dec 1887 in Erode, TamilNadu, India

Fields: Analytical Theory of Numbers, Elliptic Functions, continued Fractions, Infinite Series, Hypergeometric series, partition of integers.

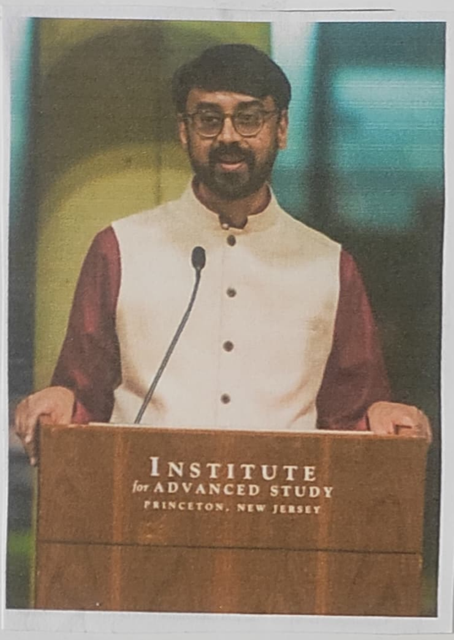
Srinivasa Ramanujan was an Indian mathematician born on December 22, 1887 in Erode, Madras presidency (Now Tamil Nadu). Despite lacking formal training in mathematics, he made substantial contribution to Mathematical analysis, number theory, infinite series, and continued fractions.

Ramanujan's early life was marked by financial struggles, but his talent was recognised by mentors who supported his education. In 1913 he independently sent a Letter to G.H. Hardy at the university of Cambridge. Impressed by Ramanujan's work, Hardy invited him to England.

Ramanujan's collaboration with Hardy resulted in groundbraking contributions. to areas like partition functions, mock theta functions, and the Ramanujan-Hardy number (1729).

Despite facing health challenges. Ramanujan continued producing remarkable theorems during his short life. He returned to India in 1919 and died on April 26, 1920, at the age of 32. Ramanujan's legacy endures, and his work continues to influence various branches of mathematics.

In 2011 Ramanujan's birthday was made "National Ma[illegible]matics Day" by Government of India.



Manjul Bhargava

Born : 08 Aug 1974 in Hamiton, Ontario, Canada

Known for: Bhargava Factorial, Bhargava Cube, 15 and 290 theorems, average rank of elliptic curves.

Awards : Fields Medal (2012), SASTRA Ramanujan Prize (2005), Padma Bhusan (2015).

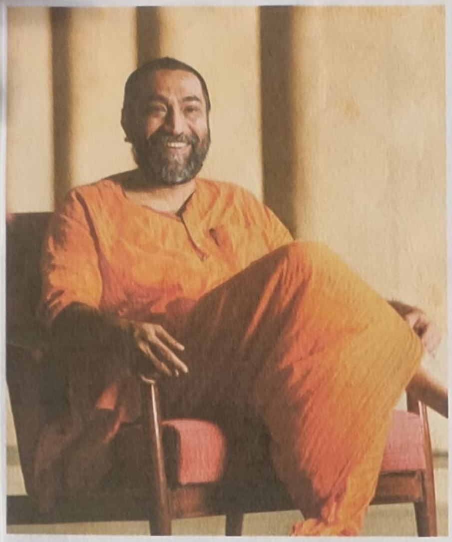
Manjul Bhargava is an acclaimed Canadian-American mathematician born on August 8, 1974, in Hamilton, Ontario, Canada. Known for his significant contributions to number theory, he is of Indian descent. Bhargavas parental residence was Jaipur, India. His mother Mira Bhargava is also a mathematician.

Bhargava completed his undergraduate studies at Havard University and earned his Ph.D. from Princeton University in 2001 under the guidance of Andrew Wiles. His doctoral works focused on generalisations of the famous Gauss composition law for binary quadratic forms.

Manjul Bhargava has held various academic positions, including a professorship at princeton university. His research spans diverse areas within mathematics, including algebraic geometry, algebraic number theory, and representation theory.

In 2014, Bhargava was awarded the Fields medal, one of the highest honors in mathematics, for his groundbraking work in algebraic geometry, particularly for developing powerful methods in geometry of numbers. He has also received other prestigious awards, acknowledging his profound impact on the field.

Aside from research, Bhangava is known for his efforts in promoting mathematics education and outreach. His works has not only expanded the frontiers of mathematics but has also inspired many aspiring mathematicians globally.



Mahan Maharaj

Also known as: Mahan Mj, Swami Vidyanathananda, Mahan Mitra.

Born: 05 Apr 1968

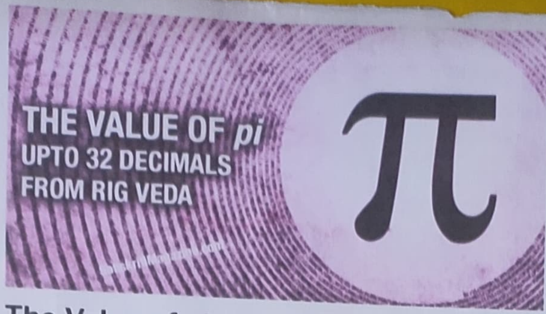
Fields: Hyperbolic Manifolds, Ending Lamination Spaces.

Institutions: Ramakrishna Mission Vivekananda Educational and Research Institute, Tata Institute of Fundamental Research.

Mahan Maharaj, also known as Mahan Mj, is an Indian mathematician and monk of the Ramakrishna Order. He was born in April 5, 1968. He is currently a professor of mathematics at the Tata Institute of Fundamental Research in Mumbai.

Mahan Maharaj studied at St. Xavier's collegiate school, Calcutta, till class XII. He then entered the Indian Institute of Kanpur, where he initially chose to study electrical engeneering but later switched to mathematics. He graduated with a masters in Mathematics from IIT Kanpur in 1992. He joined the PhD program in mathematics at the University of California, Barkeley, with Andrew Casson as his advisor. After earning a doctorate from U.C. Berkeley in 1997, he worked briefly at the Institute of Mathematical Sciences, Chennai in 1998. He was professor of mathematics and Dean of Research at the Ramakrishna Mission Vivekananda University till 2015. He is best known for his work in hyperbolic geometry. geometrical group theory, Low-dimensional topology and complex geometry.

Mahan Maharaj became a monk of the Ramakrishna order in 1998 He has been quoted as saying, "I am enjoying being a monk as much as I enjoy my mathematics". He was awarded the Shanti Swarup Bhatnagar prize in 2011 for his contributions in hyperbolic geometry.



The Value of pi upto 32 decimals from Rig Veda.

Nowadays most of all of us have a concept that 'VEDA' is a text for Yojna and Puja i.e. a guide book of a religion.

But here is a mantra of 'RIG VEDA' which has three different implications.

① It refers a Stuti of Lord Shiva.

② It refers a stuti of Lord krishna.

③ It gives the value of Pi(π) upto 32 decimals.

गोपीभाग्य मधुव्रातः शृंगशोदधि संधिगः।

खलजीवितखाताव गलहाला रसंधरः॥

gopeebhaagya maDhuvraathaH ShruMgaShodhaDhi saMDhigaH

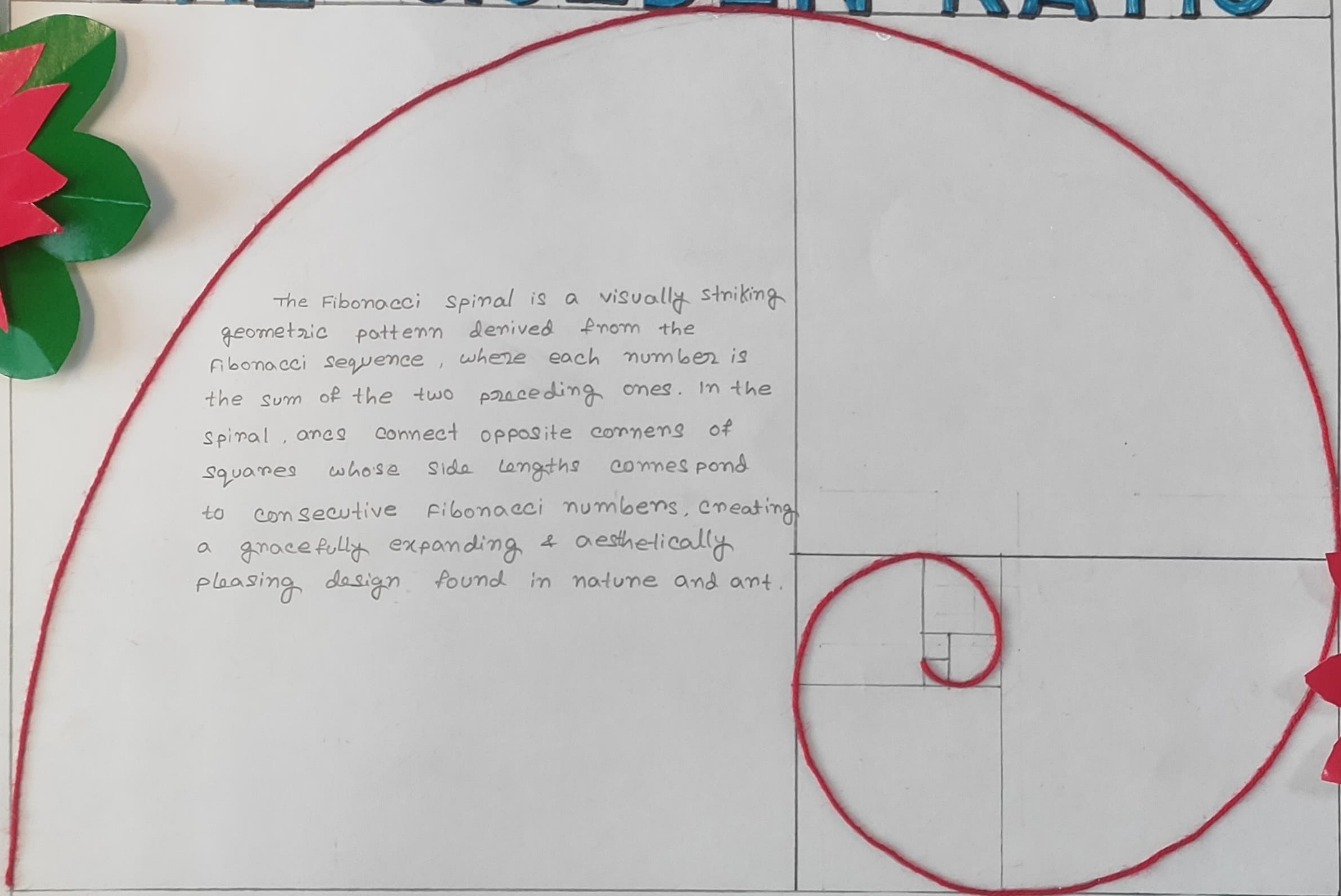
KhalajeevithakhaathaavagalahaalaarasaMDharaH

According to Vedic Numerical Code:
ga(3) pa(1) bha(4) ya(1) ma(5) Dhu(9) ra(2) tha(6) Shru(5) ga(3) sho(5) dha(8) Dhi(9) sa(7) Dha(9) ga(3) kha(2) la(3) jee(8) vi(4) tha(6) kha(2) tha(6) va(4) ga(3) la(3) ha(8) la(3) ra(2) sa(7) Dha(9) ra(2) .... 384626433832792......

So π = 3.1415926535897932

So we must not ignore 'VEDA'. Accept it as a rich source of knowledge.

THE GOLDEN RATIO



The Fibonacci spiral is a visually striking geometric pattern derived from the Fibonacci sequence, where each number is the sum of the two preceding ones. In the spiral, arcs connect opposite corners of squares whose side lengths correspond to consecutive Fibonacci numbers, creating a gracefully expanding & aesthetically pleasing design found in nature and art.

The golden ratio often denoted by the Greek letter phi(φ) is a mathematical constant approximately equal to 1.618. It appears in various aspects of art, nature, and architecture, known for its asthetic appeal. Many consider the golden ratio as a key eliment in achieving visual harmony and balance in design.

$$\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.618\ldots$$

Fibanacci Number	Divide by the one before	Ratio
1	-	-
2	2/1	2
3	3/2	1.50
5	5/3	1.66
8	8/5	1.60
13	13/8	1.62
21	21/13	1.61
34	34/21	1.61...

.....

Illustration :
$1\ cm \equiv \frac{1}{2}$ unit

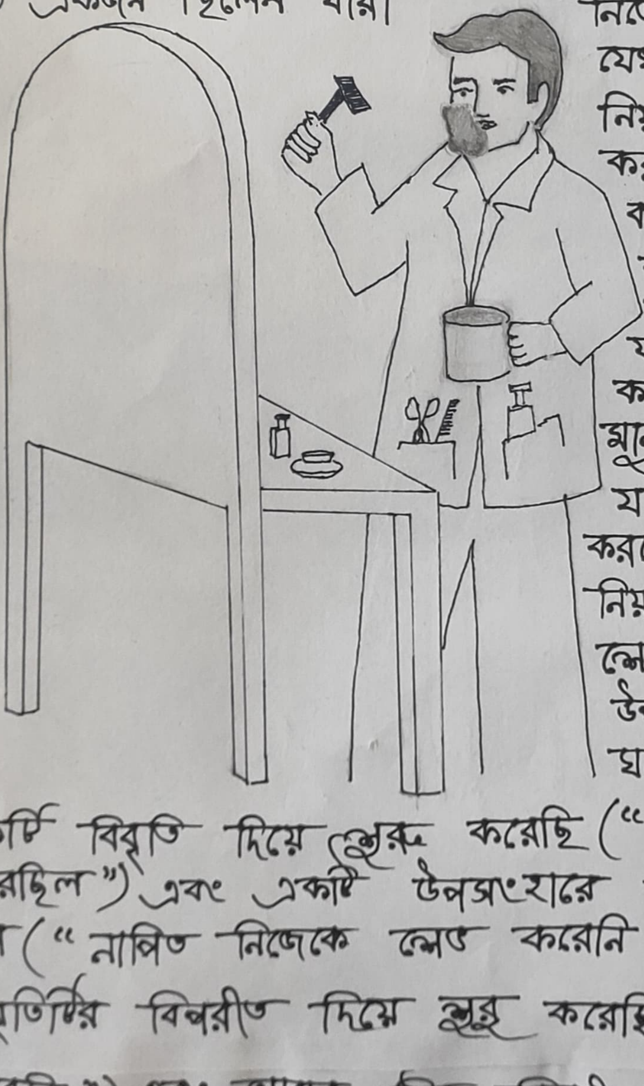
PARADOX

প্যারাডক্স বলতে কী বোঝায়?

⇒ প্যারাডক্স সম্পর্কে ধারনা পেতে নিম্নলিখিত গল্পটি বিবেচনা করতে হবে।

একটি গ্রাম ছিল যেখানে কেবল একজন নাপিত ছিল যিনি তাদের সমস্ত শেভ করত শুধুমাত্র যারা নিজেদের কামাতে না। এখন প্রশ্ন হল: "নাপিত কি নিজেকে শেভ করেছিল?"

ধরা যাক, তিনি নিজেকে শেভ করেছেন। এইক্ষেত্রে, তিনি তাদের মধ্যে একজন ছিলেন যারা নিজেদের শেভ করেছিলেন। যেখান থেকে, তার নিজের নিয়মে, তার নিজের শেভ করা উচিত নয়। কারন, তিনি তাদের শেভ করেন যারা নিজেদের শেভ করতে পারে না। অন্যথায়, যদি তিনি নিজের শেভ না করেন তাহলে তিনি সেইসমস্ত মানুষের শ্রেনীর মধ্যে পড়বেন যারা তাদের নিজেদের শেভ করতে পারে না এবং তার নিয়মের দ্বারা তার নিজের শেভ করা উচিত!

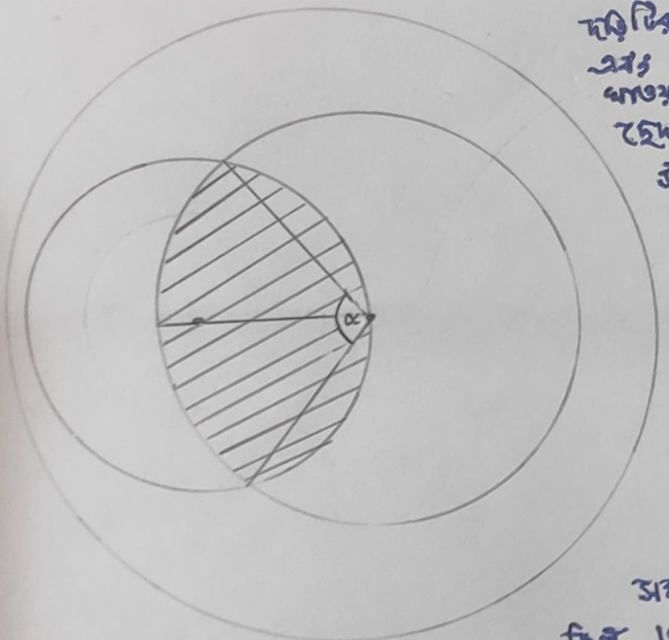


উপরের উদাহরনে, যা ঘটেছে তা আমরা প্রথমে একটি বিবৃতি দিয়ে শুরু করেছি ("নাপিত নিজেকে শেভ করেছিল") এবং একটি উপসংহারে পৌঁছেছি যা ঠিক বিপরীত ছিল ("নাপিত নিজেকে শেভ করেনি")। আমরা পরবর্তীতে বিবৃতিটির বিপরীত দিয়ে শুরু করেছি ("নাপিত নিজেকে শেভ করেনি") এবং আবার ঠিক বিপরীত সিদ্ধান্তে পৌঁছেছি ("নাপিত নিজেকে শেভ করেছিল")। এই ধরনের পরিস্থিতিকে "প্যারাডক্স" বলা হয়। এমন পরিস্থিতি যা অনুমতি দেয় না একটি পরিষ্কার, যৌক্তিক ফলাফল।

যাইহোক, একটি প্যারাডক্স দেখা যায় যখন বিবৃতি এবং এর বিপরীত উভয়েই অযৌক্তিকতার দিকে পরিচালিত করে। গ্রামের নাপিতের ক্ষেত্রেও তাই হয়েছে। আমরা দেখতে পেলাম যে আমরা আমাদের যুক্তি যেভাবেই শুরু করি না কেন আমরা একটি বিপরীত সিদ্ধান্তে পৌঁছেছি।

গরু আর ঘাস (The Goat problem)

ধরা যাক, একটা বৃত্তাকার মাঠ আছে যার ব্যাসার্ধ এক একক, মাঠের পরিধির উপর একটি বিন্দুতে একটি গরু বাঁধা আছে, গরুর দড়িটির দৈর্ঘ্য কত হলে গরুটি মাঠের অর্ধেক অংশের ঘাস খেতে পারবে?
প্রশ্নটি শুনে খুবই সাধারণ মনে হলেও এটির সমাধান করতে সময় লেগেছে 270 বছর ও শেষে 2017 সালে এর সমাধান করা সম্ভব হয়েছে।



দড়িটির দৈর্ঘ্য r এবং গরুর ঘাস খাওয়ার অঞ্চল-এ মাঠের ছেদবিন্দুগুলো এর সাথে পরিধির উপর থাকা বিন্দুটির মধ্যে কোণ α হলে, এই সম্পর্ক গুলি থেকে r এবং α এর মান পাওয়া সম্ভব : i) $r = 2\cos\frac{\alpha}{2}$ ii) $\pi + \alpha\cos\alpha - \sin\alpha = \frac{\pi}{2}$

কিন্তু দ্বিতীয় সমীকরণটি একটি transcendental equation তাই এর সমাধান করার কোনও সাধারণ নিয়ম নেই, কেবলমাত্র approximation এর সাহায্যেই এর সমাধান ছাড়া কোনও উপায় ছিল না। r এর better থেকে better অনেক approximation পাওয়া গেলেও 2017 সালের আগে এর exact সমাধান জানা ছিল না। এর approximate সমাধানে α ছিল $109°$ (প্রায়) অর্থাৎ, $r = 1.16$ (প্রায়)।

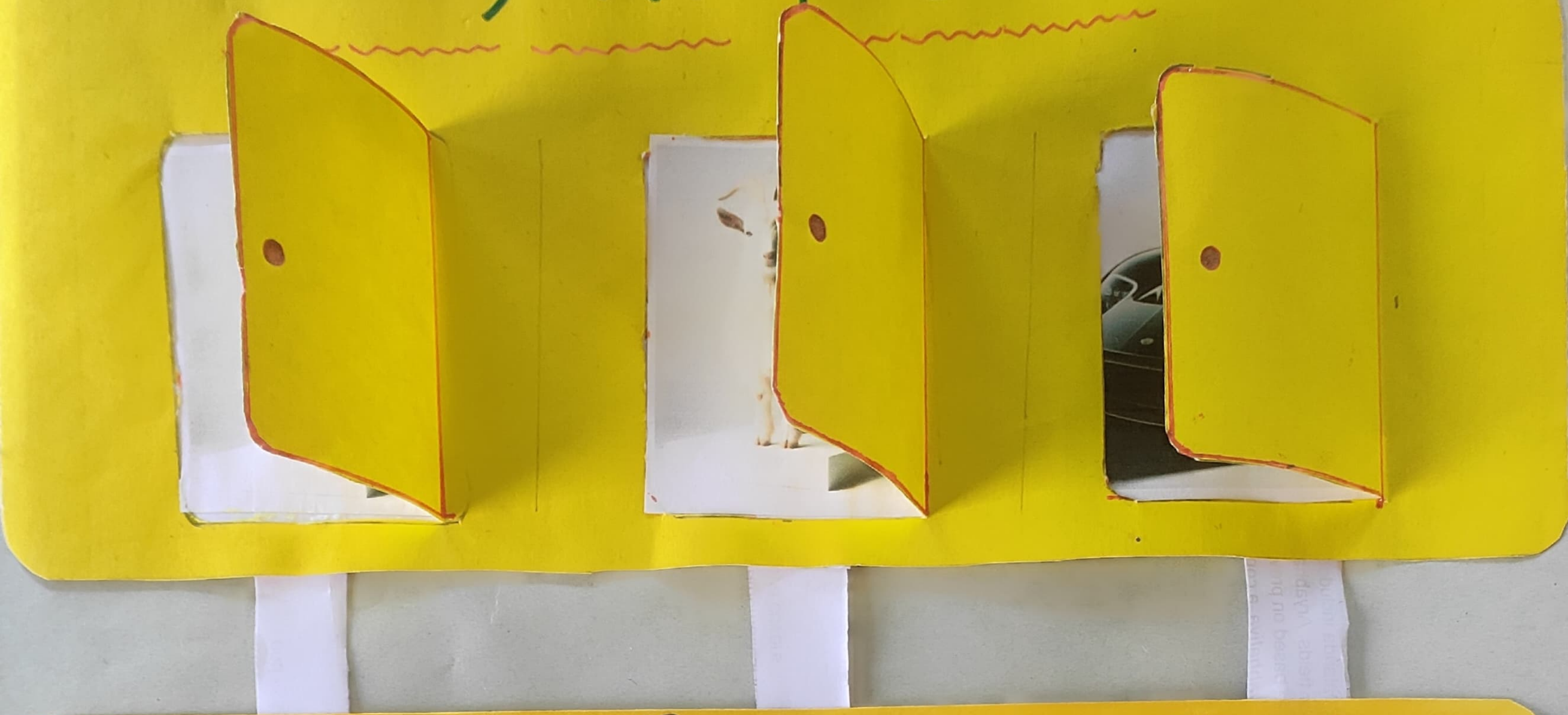
এই সমস্যার বিষয়ে আরও মজার বিষয় হলো, এরই ত্রিমাত্রিক রূপ (Bird in a cage problem) টি সমাধান করা তুলনামূলক সহজ (গোলকের তলে একটি বিন্দুতে একটি পাখি বাঁধা আছে, তবে দড়িটির দৈর্ঘ্য কী হলে পাখিটি গোলকের অর্ধেক অংশে উড়তে পারবে), এমনকি higher dimensions এ এটির সমাধানও সহজতর ও এর answer টি $\sqrt{2}$ এর দিকে converge করে।

অবশেষে 2017 সালে এই Ingo Ullisch নামের এক German mathematician complex analysis ব্যবহার করে এ problem টি সমাধান করেন, তিনি α কোণটির মান বের করেন এইভাবে

$$\alpha = \frac{\oint_{|z-\frac{3\pi}{8}|=\frac{\pi}{4}} \frac{z}{\sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2}}\,dz}{\oint_{|z-\frac{3\pi}{8}|=\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\sin z - z\cos z - \frac{\pi}{2}}\,dz}$$

[original সমস্যাটিতে ছাগল আর ঘাস এর উল্লেখ ছিল তাই এর নাম The Goat Problem]

Monty Hall Problem



Monty Hall problem হলো একটি brain teaser এখানে খেলোয়ার এর সামনে তিনটি দরজা থাকবে, তার মধ্যে একটি দরজার পিছনে গাড়ি থাকবে। বাকি দুটি দরজার পিছনে ছাগল থাকবে। খেলার নিয়মানুযায়ী গাড়ি থাকা দরজাটি নির্বাচন করলে খেলোয়ার জয়ী হবেন। প্রতিটি দরজার পিছনে যা আছে তা খেলার পরিচালক জানেন। খেলার প্রথম ধাপে খেলোয়াড়কে অনুমান করতে হবে কোন দরজার পিছনে গাড়ি আছে। এক্ষেত্রে খেলোয়াড়ের গাড়ি থাকা দরজাটি নির্বাচন করার সম্ভাবনা $\frac{1}{3}$ এরপর খেলার পরিচালক বাকি দুটি দরজার মধ্যে যে দরজায় গাড়ি নেই সেইরকম একটি দরজা বাদ দিয়ে দেবেন (কারণ, পরিচালক আগে থেকেই জানেন কোন দরজার পিছনে কি আছে)।

এরপর খেলোয়াড়কে একটি দ্বিতীয় সুযোগ দেওয়া হয় বাকি দুটি দরজার মধ্যে পুনরায় একটি বাছার। দ্বিতীয় বারের উত্তরটি final উত্তর হিসাবে নেওয়া হয়। এখন প্রশ্ন হলো, কোন ক্ষেত্রে খেলোয়াড় এর গাড়ি জেতার সম্ভাবনা বেশি? যদি তিনি নিজের নির্বাচন পরিবর্তন করেন না কি নিজের নির্বাচন অপরিবর্তিত রাখেন?

আপাতভাবে মনে হতে পারে, তিনি গাড়ি জেতা বা না জেতার সাথে নির্বাচন পরিবর্তন এর কোনও সম্পর্ক নেই। কিন্তু দেখা যায় যে, তিনি নিজের decision পরিবর্তন করলে তাঁর গাড়ি জেতার সম্ভাবনা দ্বিগুণ হয়ে যায় তুলনায় যদি তিনি নিজের decision অপরিবর্তিত রাখেন!

নিয়ম টা কী: এই নিয়মের সাহায্যে একটি সংখ্যার collection এ কতগুলি সংখ্যার প্রথম digit কোনটি তা অনুমান করা সম্ভব। একটি number এর collection এই নিয়ম মেনে চললে, সেই সেটে কোনো সংখ্যার প্রথম digit টি d ($d \in \{1, 2, \ldots, 9\}$) হওয়ার সম্ভাবনা:

$$P(d) = \log_{10}\left(1+\frac{1}{d}\right)$$

সহজ ভাষায়: প্রথম digit টি 1 হওয়ার সম্ভাবনা $\log_{10}\left(1+\frac{1}{1}\right)$ বা 0.301, মানে প্রায় 30.1% সংখ্যা এর ক্ষেত্রে প্রথম digit টি 1 হবে, এইভাবে দেখা যাবে মাত্র 4.6% সংখ্যা 9 দিয়ে শুরু হচ্ছে।

d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
P(d)	30.1%	17.6%	12.5%	9.7%	7.9%	6.7%	5.8%	5.1%	4.6%

কোন ক্ষেত্রে খাটবে: সংখ্যাগুলি যদি একটি বিস্তৃত পাল্লার মধ্যে ছড়িয়ে থাকে তবে এই নিয়মটি কার্যকর হবে। যেমন - 1) পৃথিবীর বিভিন্ন দেশের জনসংখ্যা, 2) বিভিন্ন physical constants ইত্যাদি।

যাচাই করে দেখা যাক: একটি সহজ পদ্ধতিতে যে কেউ এই নিয়মটি যাচাই করে দেখতে পারে। YouTube এ homepage এ আসা video গুলির viewcount এর প্রথম digit টি নিয়ে অন্তত 30 টি (বা তার বেশি) data নিয়ে দেখা যাবে, এই distribution টি formula থেকে পাওয়া distribution এর কাছাকাছি হবে।

ব্যবহার: বেনফোর্ড এর নিয়ম এর একটি গুরুত্বপূর্ণ ব্যবহার হতে পারে নির্বাচন এ কারচুপি ধরার জন্য। এমন নয় যে বেনফোর্ড এর নিয়ম না মানলে তথ্যে কোনো গোলমাল থাকবেই, তবে অন্যান্য পদ্ধতির সাথে মিলিয়ে এটি ব্যবহৃত হলে, কার্যকর হতে পারে।

Zipf's law

যে কোনো বই না পড়ে কি বলে দেওয়া যেতে পারে, কোন শব্দটি কতগুলো আছে ?
প্রথমে শুনে অবিশ্বাস্য মনে হলেও এটি কিছুক্ষেত্রে সম্ভব। Zipf's law তে বলা আছে, কোনও ভাষার ক্ষেত্রে একটি শব্দ কতবার আছে (ব্যবহার অনুযায়ী) তা সাজালে প্রথম শব্দটি দ্বিতীয় শব্দের দ্বিগুন পরিমান থাকবে, তৃতীয় শব্দটির তিনগুন পরিমান থাকবে, ... এই ভাবে চলতে থাকবে। অর্থাৎ, প্রথম শব্দটি n বার থাকলে দ্বিতীয় শব্দটি প্রায় $\frac{n}{2}$ বার থাকবে, তৃতীয় শব্দটি প্রায় $\frac{n}{3}$ বার থাকবে, এইভাবে চলতে থাকবে.

1913 সালে, জার্মান পদার্থবিদ ফেলিক্স আউরবাখ এই ঘটনাটি লক্ষ্য করেন।
উদাহরণ স্বরূপ, Brown corpus (আমেরিকান English text এর একটি Electronic সংগ্রহ) এ 'the' শব্দটি সবথেকে বেশি বেশি (69,971 বার) ব্যবহৃত হয়েছে, Zipf's law এর সাথে সংগত ভাবে দ্বিতীয় স্থানে থাকা 'of' শব্দটি (36,411 বার) প্রথমটির প্রায় অর্ধেক পরিমান ব্যবহৃত হয়েছে। যদিও তৃতীয় সর্বাধিক ব্যবহৃত 'and' শব্দটির (28,852 বার) উপস্থিতি Zipf's law থেকে আলাদা।
এই একই নিয়ম আরও অনেক ক্ষেত্রে কার্যকর হয়। যেমন, যদি corporation গুলি decreasing size অনুযায়ী সাজানো হয় বা, TV channel গুলিকে viewership অনুযায়ী সাজানো হয় এমনকি music এর note এর ব্যবহার ইত্যাদি।

সীমাবদ্ধতা : 1913 সালে আউরবাখ এর observation ছিল শহরের আকার গুলি। কিন্তু বর্তমানে, শহরের আকারের ক্ষেত্রে এই নিয়ম সঠিক ভাবে প্রযোজ্য হয় না। অনেক East Asian ভাষা (Chinese, Vietnamese) এর ক্ষেত্রে এই নিয়ম খুবই খারাপ ফলাফল দেয়, তবে অধিকাংশ ভাষার জন্যই এই নিয়ম কার্যকরী।

Graceful Labelling of a Digraph

: A digraph D with p vertices and q arcs is labeled by assigning a distinct integer value g(v) from {0, 1, ..., q} to each vertex v. The vertex values, in term, induce a value g(u,v) on each arc (u,v) where

$g(u,v) = (g(v) - g(u))\ (\text{mod } q+1)$

If the arc values are all distinct then the labelling is called a graceful labeling of digraph.

Graceful labelling of $\overrightarrow{W_{12}}$

— Soumi Ghosh (Ex student)

Finding Prime Numbers.

METHOD

1) Check if $n=2$ or it is not divisible by any k such that $k \in \{2, 3, \ldots, n-1\}$. But in this method, time complexity is $O(n)$.

METHOD

2) Check if $n=2$ or it is not divisible by any natural number k such that $1 < k \leq \frac{n}{2}$. In this method also, the time complexity is $O(n)$.

METHOD

3) Check if $n=2$ or it is not divisible by any natural number k such that $1 < k \leq \sqrt{n}$. In this method time complexity reduces to $O(\sqrt{n})$.

Mersenne prime : A prime number of the form $2^n - 1$, where n is an integer is known as mersenne prime. It is conjectured that there are infinite number of mersenne primes. But only 51 of them are known.

GIMPS: The Great Internet Mersenne Prime Search is a colleborative project of volunteers who use freely available software to search for mersenne prime numbers.

METHOD

4) GIMPS uses the following algorithm to find primes. Lucas Lehmar primality test. Consider the recurrence relation,

$$S_n = \begin{cases} 4 & \text{if } i = 0; \\ S_{i-1}^2 - 2 & \text{otherwise} \end{cases}$$

The first few terms in this sequence are 4, 14, 194, 37634, ... Then $M_p \, (= 2^p - 1)$ is prime if and only if $S_{p-2} \equiv 0 \pmod{M_p}$.

As of now, $2^{82,589,933} - 1$ is the largest known mersenne pri[...] It was found via GIMPS in 2018. This number 2[...]its. It is also the largest known prime

a Ramanujan Graph?

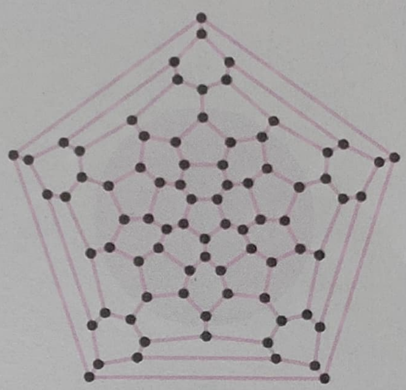


Figure 1: This Ramanujan graph has 80 vertices,which is close to the largest known planar Ramanujan graph of 84 vertices

By a graph X =(V,E) we mean a finite set V of vertices and a set E of pairs of these vertices called edges and a map that associates to each edge two vertices called its endpoints. A simple graph is one having no loops or multiple edges i.e contains neither an edge whose endpoints are equal nor edges having the same pair of endpoints. To any graph with n vertices, we may associate the adjacency matrix A which is an nxn matrix with rows and columns indexed by the elements of the vertex set and the (i, j)-th entry is the number of edges connecting i and j. As there are not direction in the edges, the adjacency matrix is a symmetric matrix. That makes the eigenvalues of the adjacency matrix are all real. Enter the world of typical regular graphs—structures characterized by an equal number of incisive edges on each vertex. The eigenvalues of this matrix for a k-regular graph fall between k and -k, with one eigenvalue always equal to k. Remarkably, for such graphs, the maximum of all eigenvalues, excluding k, is always less than $\sqrt{2k-1}$. This graphs first investigated in the Ramanujan-Petersson conjecture to derive such typical graphs. To connect the history mathematicians Alexander Lubotzky, Ralph Phillips, and Peter Sarnak coined the term "Ramanujan Graphs", a concept whose spectral nature permeates various branches of mathematics and mathematical physics.

They fuse diverse branches of pure mathematics, namely, number theory, representation theory, and algebraic geometry."
Mathematician Ram P. Murty

While any complete graph of degree greater than one qualifies as a Ramanujan graph, there exist exquisite examples such as the Petersen graph, the Paley graph, the isosahedral graph, and the Cayley graph. Lubotzky, Phillips, and Sarnak, along with Grigory Margulis independently, discovered the existence of an infinite family of Ramanujan graphs of degree $(p + 1)$, where p is a prime of the form $4k + 1$, utilizing the Cayley graph of $PSL(2, \mathbb{Z})$.

Another breakthrough came from Adam Marcus, Daniel Spielman, and Nikhil Srivastava, who established the existence of an infinite family of k-regular bipartite Ramanujan graphs with high probability. However, the challenge of proving the existence of infinite k-regular graphs for each k remains open.

In contemporary mathematics, the pursuit of expander graphs—graphs that are both strongly connected and sparse—is at the forefront. Ramanujan graphs stand out as exemplary expander graphs, a testament to their unique and contradictory natures. The search for these graphs extends beyond mathematics, making substantial contributions to theoretical computer science and cryptography. Supersingular isogeny graphs, a class of Ramanujan graphs, form the foundation of modern elliptic curve cryptography and are envisioned as a tool for post-quantum cryptography. Additionally, in communication theory, the demand for networks with small diameters for efficient operation finds fulfillment in Ramanujan graphs due to their inherent properties.